# 經濟論叢

第八十巻　第三號



昭和三十二年九月

京都大學經濟學會

# 選択理論における一つの問題点

西川　徹

ヒックスの「価値と資本」においては最初に効用函数を仮定し、そこから限界代替率の概念を導き、その限界代替率と budget equation とから均衡条件を導き出し、更にその均衡値の性質をいろいろと吟味するというように論が進められてゆく。しかし、たとえ順序づけが可能であるだけのものにせよ、このような効用函数というものを最初に仮定して、その上に理論を構成するということは果して妥当であろうかということが問題となる。

言うまでもなく、理論はできるだけ一般的な妥当性を持った仮定の上に構成されなければならない。パレート、エッヂワースによって効用の可測性がすてられ、順序づけのみが可能な効用概念のみで十分であるとされたのも、この意味において理論構成における進歩であった。しかし、我々は順序づけの可能な効用函数というようなものや各点における限界代替率というようなものをも経験的に知ることはできない。我々が経験的に知り得るのは或る価格体系と所得額とが与えられた時に各々の財がそれぞれどれだけ買われるかという値、即ち需要函数のとる値のみである。言いかえれば均衡値のみを知り得るわけである。そこで、効用函数とか限界代替率とかから出発するのではなく、経験的に知り得る各均衡値の間の単純な関係から出発して理論を構成しようというのがサムエルソンによって展開された revealed preference の理論である[1]。それでは、このように均衡値間の関係から出発する理論と、

それまでの効用函数から出発する理論とはどのような関係にあることになるだろうか。即ち、各々の価格体系及び所得の下における各均衡値が最初に与えられ、それらの点における budget plane の勾配（これは均衡点における限界代替率に等しい）が与えられた場合、そこから出発して効用函数を構成するすとが可能であるかどうかという問題である。これは言いかえれば、それらの budget plane の envelope たる無差別曲面を構成することが可能であるかどうか、そしてこれが可能であるためにはどのような条件が必要であるか、という問題であり、これは積分可能条件の問題としてかなり古くから論じられきたものである。これは数学的な問題であるが、これらの経済学的な意味についての考察は、アレン、ヒックス、ジョルジュスクレーゲン等によって取り上げられた。[2] そこで明らかになったことはスルッキー方程式の代替項の対称性が積分可能を保証する条件になるということであった。しかし、この代替項の対称性という結論は「効用函数の二次微分」というようなものを問題にしているわけであって、効用函数を前提としないで出発する revealed preference の理論の場合にはそのまま当てはまるというわけにはゆかない。ハウタッカーはサムエルソンの revealed preference の理論と同様の仮定に立って、その理論の長所を保持しながら、その理論が積分可能条件を満たすためにはどのような仮定が必要であるかを考察し、その必要な仮定が推移律の仮定であることを明らかにした。[3] スルッキー方程式の代替項の対称性という条件と選択順序の推移律という条件とは異った条件のように見えるが、この二つは、勿論、同一の条件である。ここでは上の二つの条件についてそれぞれ考察し、次にはその二つの間の関係を明確にしたいと思う。

(1) この理論は、P. A. Samuelson, "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour", *Economica*, 1938, pp. 61～71, 353-354. において、はじめて展開された。

(2) R. G. D. Allen, "The Foundation of a Mathematical Theory of Exchange", *Economica*, 1932, pp. 197～226, R. G. D. Allen and J. R. Hicks, "A Reconsideration of the Theory of Value" *Economica*, 1934. pp. 52～76, 196～219. N. Georgescu-Roegen, "The Pure Theory of Consumer's Behaviour," *Quarterly Journal of Economics*, 1936, pp. 545～593.

(3) H. S. Houthakker, "Revealed Preference and the Utility Function", *Economica* 1950, pp. 159–174,

## 一

先づ最初に、後の考察の便宜上、積分可能のための数学的条件を簡単に要約して示しておくことにする。

(i) 二変数の場合。二変数の微分方程式$\dfrac{dy}{dx}=f(x, y)$ では $f(x, y)$ が連続な偏導函数を持つ限り常に積分可能である。この微分方程式の解が存在するための条件は $f(x, y)$ が連続な範囲内の二点 $(x, y_1)$, $(x, y_2)$ において、$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqq K|y_1-y_2|$（$K$は正の常数）が成立つことであるが、連続な偏微係数 $\partial f/\partial y$ が存在すれば平均値の定理によって次式のようになり右の条件式は満足される。$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|=\dfrac{\partial f_0}{\partial y}|y_1-y_2|\leqq K|y_1-y_2|$, $(f_0=f\{x, y_1+\theta(y_2-y_1)\})$

(ii) 三変数以上の場合。$Q_1dx_1+Q_2dx_2+\cdots\cdots+Q_ndx_n$ において、任意の三変数について、

$$Q_k\left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}-\frac{\partial Q_j}{\partial x_i}\right)+Q_i\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x_k}-\frac{\partial Q_k}{\partial x_j}\right)+Q_j\left(\frac{\partial Q_k}{\partial x_i}-\frac{\partial Q_i}{\partial x_k}\right)=0$$

が積分可能のための条件である。

次に選択理論の場合について、この条件の経済学的意味を考察しよう。選択理論における積分可能の必要条件というのは限界代替率の関係を示す微分形式、

$$\frac{u_1}{u_n}dx_1+\frac{u_2}{u_n}dx_2+\cdots\cdots+\frac{u_{n-1}}{u_n}dx_{n-1}+dx_n=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

が前述の(ii)に示された条件を満たすことである。三財の場合について考察することにしても一般性は失われないから、$u_1/u_3=R_1,\ u_2/u_3=R_2$ として、$R_1dx_1+R_2dx_2+dx_3=0$ が積分可能であるための条件は、(ii)の条件式において、$i=1,\ j=2,\ k=3,\ Q_3=1$ とおいて、

$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial x_2}-\frac{\partial R_2}{\partial x_1}\right)+\left(R_1\frac{\partial R_2}{\partial x_3}-R_2\frac{\partial R_1}{\partial x_3}\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots (2)$$

この条件式が何を意味するかを次に考えよう。[1)]

いま、均衡値においては、$u_i/u_3=p_i/p_3=R^0{}_i\ (i=1,2)$ とおくことにしよう。この時、$R_i{}^0=R_i{}^0(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0)$ 但し、$x_1^0\ x_2^0\ x_3^0$ は均衡点における三財のそれぞれの値である。均衡点に限定しない場合の一般の限界代替率を$R_i$で表わすとすると、$R_i=R_i(x_1, x_2, x_3)$。

budget equation は、$R_1{}^0x_1+R_2{}^0x_2+x_3=$ const. $\cdots\cdots\cdots$ (3)

限界代替率の関係を示す微分形式は

$$R_1dx_1+R_2dx_2+x_3=0 \quad\cdots\cdots\cdots (4)$$

(3)及び(3)を微分したものを(4)へ代入し、$x_3$, $dx_3$, を消去すると、

$$\{R_1(x_1, x_2, C-R_1^0x_1-R_2^0x_2)-R_1^0\}dx_1 + \{R_2(x_1, x_2, C-R_1^0x_1-R_2^0x_2)-R_2^0\}dx_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

$x_i-x_i^0=X_i$ とおいて上式を書きかえると、

$$W_1(X_1, X_2)\,dX_1+W_2(X_1, X_2)\,dX_2=0$$

この式を均衡点において展開すると、

$$\{W_1(0,0)+X_1W_{11}(0,0)+X_2W_{12}(0,0)\}\,dX_1 + \{W_2(0,0)+X_1W_{21}(0,0)+X_2W_{22}(0,0)\}\,dX_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

但し、$W_{ij}=\partial W_i/\partial X_j$

この(6)において $W_1(0,0)=0$, $W_2(0,0)=0$ であることは $X_i=0$, 即ち$x_i=x_i^0$ を(5)に代入すれば容易に確めることができる。いま、$W_{ij}(0,0)=W_{ij}^0$と書けば、

$$\{X_1W_{11}^0+X_2W_{12}^0\}\,dX_1+\{X_1W_{21}^0+X_2W_{22}^0\}\,dX_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

$X_2/X_1=Y$ ＝とおくと、(7)は、

$$2\frac{dX_1}{X_1}+\left[\frac{T'(Y)}{T(Y)}+\frac{W_{21}^0-W_{12}^0}{T(Y)}\right]dY=0 \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

但し、$T(Y)=W_{11}^0+(W_{12}^0+W_{21}^0)Y+W_{22}^0Y^2$

(8)式は二変数の微分方程式であるから先にも述べたように数学的に積分可能である。このことは、もともと三変数

の場合（この場合には積分可能であるためには前述の(ii)の条件が必要である）を問題にしているのであるが、三変数のままでは経済学的な意味を知るには不便であるので、一つの平面に射影することによって二次元の問題に引き直したのである。二変数の場合に変えれば、通常、積分可能となるから、それを積分してその結果から最初におかれた三変数の場合の積分可能条件の問題を考えてみようというわけである。積分してみた結果は、

$$\log\left[X_1^2\cdot T(Y)\right]+\frac{4W_{22}^0(W_{21}^0-W_{12}^0)}{\delta^2}\int\frac{\delta^2}{4W_{22}^0\cdot T(Y)}dY=C \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

但し、$\delta^2=4W_{11}^0W_{22}^0-(W_{21}^0+W_{12}^0)^2$、即ち$T(Y)$の判別式の$-1$倍。また$C$は積分常数。(9)は更に計算の結果、

$$\log\left[X_1^2\cdot T(Y)\right]+\frac{2(W_{21}^0-W_{12}^0)}{\delta}\tan^{-1}\left[\frac{1}{\delta}\cdot T'(Y)\right]=C \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

そこで、もし $W_{21}^0=W_{12}^0$ ならば(10)の第二項は消え、

$$\log\left[X_1^2\cdot T(Y)\right]=\log\left(W_{11}^0X_1^2+(W_{12}^0+W_{21}^0)X_1X_2+W_{22}^0X_2^2\right)=\text{const.}$$

故に、$W_{11}^0X_1^2+(W_{12}^0+W_{21}^0)X_1X_2+W_{22}^0X_2^2=\text{const.}$

この二次形式を標準形に直すと、

$$W_{11}^0\left(X_1+\frac{W_{12}^0+W_{21}^0}{2W_{11}^0}X_2\right)^2+\frac{4W_{11}^0W_{22}^0-(W_{12}^0+W_{21}^0)^2}{4W_{11}^0}X_2^2 \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

$W_{11}^0=A$, $\dfrac{4W_{11}^0W_{22}^0-(W_{12}^0+W_{21}^0)^2}{4W_{11}^0}=B$ とおけば、(11)は、$A\bar{X}_1^2+B\bar{X}_2^2=C$

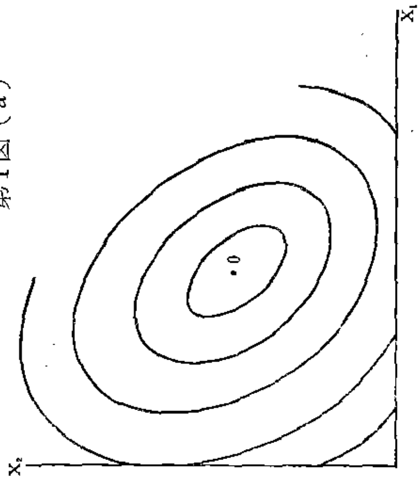
さて、$4W_{11}{}^0W_{22}{}^0-(W_{12}{}^0+W_{21}{}^0)^2=\delta^2$ は常に正である。何となれば均衡値において安定条件が満たされていれば、

$$W_{11}{}^0dX_1^2+(W_{12}{}^0+W_{21}{}^0)\ dX_1\cdot dX_2+W_{22}{}^0dX_2^2<0$$

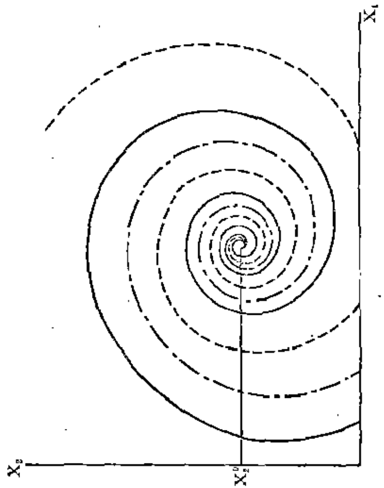
故に、$W_{11}{}^0+(W_{12}{}^0+W_{21}{}^0)\dfrac{dX_2}{dX_1}+W_{22}{}^0\left(\dfrac{dX_2}{dX_1}\right)^2<0$

従って $T(Y)<0$。即ちこれの判別式は負で $T(Y)$ は常に虚根を持つ。故に $\delta^2>0$。そこで上に示した $A$、$B$ について $AB>0$ が成立つ。即ち $A$、$B$ は同符号。従って、

第1図（a）




第1図（b）



$$\frac{X_1^2}{\frac{C}{A}} + \frac{X_2^2}{\frac{C}{B}} = 1 \text{ or } -1 \cdots\cdots\cdots (12)$$

において $C/A>0$, $C/B>0$ ならしめることができる。この時⑫は楕円（右辺が−1の時には虚楕円）の方程式である。従って、この $W_{12}^0=W_{21}^0$ の場合には閉曲線が得られ（第1図a）、$W_{12}^0 \neq W_{21}^0$ の場合には渦巻型の曲線となり閉曲線にならない（第1図b）。これらの曲線は無差別曲線族を budget plane で切った切断面に現われた曲線であると考えてよい。第1図aの場合が最初に考えられた三変数の微分形式⑷が積分可能な場合である。この $W_{12}^0=W_{21}^0$ という条件は前に示した数学的条件に等しい条件である。何故なら、⑸から、

$$W_{12}^0=\frac{\partial W_1^0(0,0)}{\partial X_2}=\frac{\partial R_1^0}{\partial x_2}-\frac{\partial R_1^0}{\partial x_3}R_2^0$$

$$W_{21}^0=\frac{\partial W_2^0(0,0)}{\partial X_1}=\frac{\partial R_2^0}{\partial x_1}-\frac{\partial R_2^0}{\partial x_3}R_1^0$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial R_1^0}{\partial x_2}-\frac{\partial R_2^0}{\partial x_1}\right)+\left(R_1^0\frac{\partial R_2^0}{\partial x_3}-R_2^0\frac{\partial R_1^0}{\partial x_3}\right)=0$$

となり⑵に一致する $W_{12}^0 \neq W_{21}^0$ の場合には積分可能とはならない。この場合については後に考察するとして、$W_{12}^0=W_{21}$ の場合に関して、それの持つ意味を更に検討しよう。$R_i^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ $(i=1,2)$ の逆函数を考えると、それは普通の形の需要函数であり、$x_i=D_i$ $(p_1/p_3, p_2/p_3, I/p_3)$, $(i=1,2,3)$ 但し $I$ は所得。$I/p_3=R_I^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, また $\partial R_i^0/\partial x_j=R_{ij}^0$, $\dfrac{\partial D_i}{\partial(p_j/p_3)}=D_{ij}$, $\dfrac{\partial D_i}{\partial(I/p_3)}=D_{iI}$ とすると、次に示す関係が存在する

ことは容易に知られる。

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x_1&x_2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11}^0-R_1^0R_{13}^0, & R_{12}^0-R_2^0R_{13}^0, & R_{13}^0\\R_{21}^0-R_1^0R_{23}^0, & R_{22}^0-R_2^0R_{23}^0, & R_{23}^0\\0 & , \quad 0 & , \quad 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\R_1^0&R_2^0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x_1&x_2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11}^0&R_{12}^0&R_{13}^0\\R_{21}^0&R_{22}^0&R_{23}^0\\R_{I1}^0&R_{I2}^0&R_{I3}^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_{11}&D_{12}&D_{1I}\\D_{21}&D_{22}&D_{2I}\\D_{31}&D_{32}&D_{3I}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x_1&x_2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{11}+D_1D_{1I}, & D_{12}+D_2D_{1I}, & D_{1I}\\D_{21}+D_1D_{2I}, & D_{22}+D_2D_{2I}, & D_{2I}\\D_{31}+D_1D_{3I}, & D_{32}+D_2D_{3I}, & D_{3I}\end{pmatrix}^{-1} \quad\cdots\cdots\cdots (13)$$

いま、$W_{12}=W_{21}$ であるから、$R_{12}^0-R_2^0R_{13}^0=R_{21}^0-R_1^0R_{23}^0$。この対称関係が成立つということは、右の(13)式から$D_{12}+D_2D_{1I}=D_{21}+D_1D_{2I}$ という対称関係が成立つことに等しい。ところで、$D_{12}+D_2D_{1I}=D_{21}+D_1D_{2I}$ を書きかえると

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}+x_2\frac{\partial x_1}{\partial I}=\frac{\partial x_2}{\partial p_1}+x_1\frac{\partial x_2}{\partial I},$$

これはスルッキー方程式の代替項の対称性を示すものに他ならない。即ち、$W_{12}=W_{21}$ が積分可能の条件であるとは、スルツキー方程式の代替項の對稱性が積分可能の條件であるということに等しい。

次に $W_{13}^0\neq W_{31}^0$ の場合について考えよう。この場合には第一図bに示したように渦巻型の曲線になる。第一

図bの場合には、二財（もともと三財の場合を考察しているのであるが、一つの平面への射影によって二財の場合に変換した）のうち一財$X_2$の量を$X_2^0$に固定して他の一財$X_1$を増加させれば、中心点に到達するまでに同一の曲線に交わるのは一度にとどまらない。それぞれの曲線は選択順序を示す指標であるから、一財の量を固定して他の一財の取得量を増加してゆく時、選択指標が上昇したり下落したりして循環的変動を繰返すことを意味している。如何なる財の取得量も減少していないのに選択指標が下落するのは明らかに不合理である。第一図aの場合に同様のことを考えれば中心点に近づくにつれて選択指標は決して下落することなく単調に上昇してゆき、この場合には選択に関して矛盾は存しない。このように積分可能条件と選択に関する無矛盾性との間には深い関連が見られる。この点から revealed preference の理論における積分可能条件の問題をとりあげたのがハウタッカーである。

(1) 以下、本節における議論は、N. Georgescu-Roegen; *ibid.* 及び P. A. Samuelson; "The Problem of Integrability in Utility Theory," *Economica*, 1950, pp. 355-385. による。

(2) H. S. Houthakker; *ibid*, pp.159-174。次節において、この論文で展開された理論をとりあげる。

## 二

revealed prference の理論においては、経験的に観測され得る関係のみを出発点にとる。$(p_1^0, p_2^0, \ldots\ldots, p_n^0)$なる価格と$I^0$なる所得の下では$(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_n^0)$の財の組合せが選ばれ、$(p_1^1, p_2^1, \ldots\ldots, p_n^1)$と$I^1$の下では$(x_1^1, x_2^1, \ldots\ldots, x_n^1)$が選ばれたとしよう。それらの組合せをベクトルと考えると、$P^0$、$P^1$、$X^0$、$X^1$の各ベクトルの内積は、

$$(X^0, P^0) = \sum x_i^0 p_i^0 = I^0, \quad (X^0, P^1) = \sum x_i^0 p_i^1$$

$$(X^1, P^0) = \sum x_i^1 p_i^0, \quad (X^1, P^1) = \sum x_i^1 p_i^1 = I^1$$

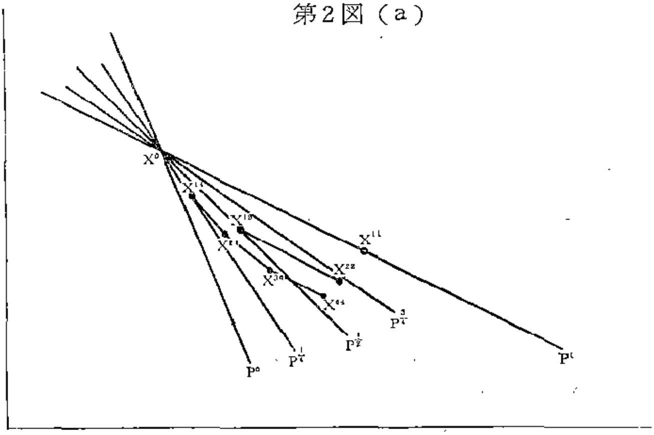
で、これらは、それぞれの価格体系の下における、異ったそれぞれの財の組合せへの支出総額を示す。いま、次のような仮設をおく。$(X^1, P^0) \leqq (X^0, P^0)$ なる時には、消費者は$X^1$を買うことができたにもかかわらず、$X^0$を買うことを選んだのであるから、$X^0$は$X^1$よりも高い選択順序にあり、これは $X^1 < X^0$ と記される。同様に、$(X^0, P^1) \leqq (X^1, P^1)$ ならば $X^0 < X^1$ である。また、$X^1 < X^0$, $X^1 = X^0$, $X^1 > X^0$ のうち、どの二つも同時には成立たないと仮定する。これだけの仮設から出発して、効用函数とか限界代替率の如き経験的には明確ではない概念を用いることなしに、消費者行動の均衡条件や安定条件を導き出すことができる。[1]

この revealed preference による接近法の一つの特徴は常に有限な変位のみを考え、変位が連続的に生じ得るとは考えないことである。従って「微分」というような方法を取ることを避ける。このことは現実の消費者行動における需要量や価格の変化は非連続的であって連続的変化を観測することは不可能であるという経験的事実にもとづくものであり、経験的な験証に耐え得る事実のみから理論を構成しようとする試みのあらわれであろう。

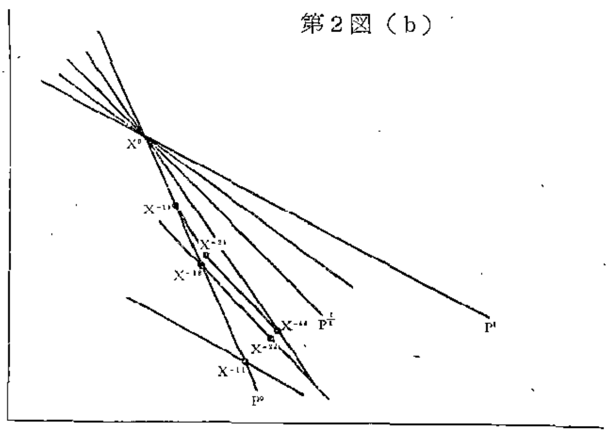
さて、ハウタッカーもこれらの仮設から出発する。いま、$P^0$ の価格の下で選ばれる財の組合せを$X^0$とし、また$P^1X^{11} = P^1X^0$ の所得で$P^1$の価格（但し、$P^1$は$P^0$とは異なるとする）の下で選ばれる財の組合せを$X^{11}$とすれば、前述のように、$X^{11} \geqq X^0$。次に $p_{i\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_i^0 + p_i^1)$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ なるように$P^{\frac{1}{2}}$ を選ぶ。これは明らかにあらゆる財の価格について$P^0$と$P^1$の間にある。この$P^{\frac{1}{2}}$ の価格と $P^{\frac{1}{2}}X^{12} = P^{\frac{1}{2}}X^0$ の所得の下において選ばれる財の組合せを$X^{12}$としよう。この時 $X^{12} \geqq X^0$。そこで$P^1X^{22} = P^1X^{12}$ の所得で$P^1$の価格の下で選ばれる財の組合せを$X^{22}$と

すると$X^{22}\geqq X^{12}$。更に$X^{22}$と$X^{11}$との関係をみれば次のようになる。いま $P^{\frac{1}{2}}X^{12}=P^{\frac{1}{2}}X^0$、また明らかに$P^0X^{12}>P^0X^0$であり、$P^{\frac{1}{2}}$は$P^0$と$P^1$の間にあるから$P^1X^{12}<P^1X^0$、故に$P^1X^{22}<P^1X^{11}$、従って、$X^{22}$、$X^{11}$は共は$P^1$の価格の下で選ばれる財の組合せであるから、$X^{22}<X^{11}$。次に $p_i^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}(p_i^0+p_i^{\frac{1}{2}})$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$ をとれば、$P^{\frac{1}{4}}$の価格で $P^{\frac{1}{4}}X^{14}=P^{\frac{1}{4}}X^0$ の所得において選ばれる財の組合せ$X^{14}$は$X^0$よりも選択順序において低くない。即ち$X^{14}\geqq X^0$ 前と同様にして、$P^{\frac{1}{2}}X^{24}=P^{\frac{1}{2}}X^{14}$ なる$X^{24}$を選び、更に$P^{\frac{3}{4}}$をとって$X^{34}$を導いてゆくと、結局、$X^{14}\geqq X^0$, $X^{24}\geqq X^{14}$, $X^{34}\geqq X^{24}$, $X^{44}\geqq X^{34}$ が得られる。同様にして、$P^{\frac{1}{8}}$、$P^{\frac{1}{16}}$について同じことを繰返してゆくことができる。この結果、知り得ることは$X^0$の点から出発するいくつかの点列を構成することができ、それぞれの点列は最初において取る価格によって、$P^1$、$P^{\frac{1}{2}}$ ……にそれぞれ対応している。従って$P^{\frac{1}{2^n}}$のnを無限に大きくしてゆけば無限箇の点列を構成することができるわけである。重要なことは、これらの点列の各々においては、点列中の任意の点$a_i$は、その直前の点$a_{i-1}$よりも高い選択順序にあることである。即ち$a_i\geqq a_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$[9]。これは一つの点列中における一点と他の一点との間の関係についてであるが、次に、このようにして構成された一つの点列と他の一つの点列との間には、先に$X^{22}<X^{11}$を導いたように他の点列間に関しても同様の結論を導くことができ、最初に取る価格が$p^1$である点列は、他の如何なる価格を最初に取る点列よりも、それぞれの点列中の同一の価格体系に対応する点を比較すれば常に高い選択順序にある。一般に、最初に取る価格が$P^{\frac{1}{2^n}}$であるから、このnが小さい点列ほど同一価格に対応する他点列中の点と比較すれば常に高い選択順序にある。このことは第二図に示されている。

第2図（a）




第2図（b）






また逆に点列中の任意の点$b_i$が、その直前の点$b_{i-1}$よりも低い選択順序にある、即ち $b_i \underline{\lhd} b_{i-1}$ $(i=1,2,\ldots\ldots)$ なる点列族を構成することもできる（第二図b参照）。そのためには$P^1$の価格の下で $P^0X^0=P^0X^{-11}$ の所得で選ばれる

財の組合せ $X^{-11}$ をとれば $X^0 \geqq X^{-11}$。以下、前と同様のことを繰返せばよい。この場合には各点列の間の関係は $P_{\frac{1}{2^n}}$ であらわされるところの最初にとる価格について、$n$ が大きい点列ほど同一価格に対応する他点列中の点と比較すれば常に高い選択順序にある。これをグラフについてみれば第二図 $b$ のようになる。このような点列を下降点列（$(b_i \geqq b_{i-1}$ のもの）と呼び、前に構成した点列（$a_i \geqq a_{i-1}$ のもの）を上昇点列と呼ぼう。上昇点列の中の二点、$X^{+a}$、$X^{+b}$ をとると $P^b X^{+b} = P^b X^{+a}$ ならしめるように適当な $P^b$ を選ぶことができる。いま $P^b X^{+b} - P^a X^{+a} = \Delta M^+$ とする。また $p_i^b - p_i^a = \Delta p_i$ とする。

$$\Delta M^+ = P^b X^{+b} - P^a X^{+a} = P^b X^{+a} - P^a X^{+a} = \sum_{i=1}^{n} x_i^a \cdot \Delta p_i$$

もし $P^b$ が $P^a$ に限りなく近づくならば、

$$dM^+ = \sum_i x_i^a dp_i$$

同様に下降点列についても、

$$dM^- = \sum_i x_i^a \cdot dp_i$$

このことからわかることは上昇点列も下降点列も共に同一の微分方程式を満足することである。価格は一定の原則によって変化させられるから（即ち $p_{i\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}(p_i^0 + p_{i\frac{1}{2^{n-1}}})$）、$t$ なるパラメーターを用いて、

$$dM - \sum_i x_i \frac{\partial p_i}{\partial t} dt = 0$$

$M$の任意の二点、$M^1$、$M^2$をとる時、この微分方程式の解が存在するための条件は $\left|\sum_i x_i(t, M^1) - \sum_i x_i(t, M^2)\right| < K|M^1 - M^2|$, $(K = \mathrm{const.})$ であるが、前節において証明したように需要函数が所得と価格に関して連続な偏導函数を持つならばこの条件は満足される。従って上昇点列も下降点列も極限においては一致する。

このハウタッカーの分析は、前節において述べた限界代替率の関係を示す微分形式から出発した理論と類似の推論によって進められていることに注意しよう。前節においては三財の場合を取り上げ、それを一つの平面に射影することによって二財の場合に変換し、連続な偏導函数の存在を仮定して積分曲線を画き、その曲線が選択に関する矛盾を含んでいないかどうかを、言いかえれば、無差別曲線の性質を満たしているかどうかを吟味し、それによって積分可能であるかどうかを判定できることを示した。このハウタッカーの場合においても、一つの仮定をおくことによって多変数の場合を二変数の場合に変換する。[4] 即ちnの価格は決してそれぞれ独立に変動することはできず、$p_{i\,2^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}p_i^0 + p_{2^{\frac{1}{n-1}}})$ のような関係式でしばられていて、$n$ケのうちの一つの価格の変化状態が与えられると、他の$n-1$ケの価格の各初期値からの変化過程の状態も直ちに定まってしまうのである。このことを示しているのが前式におけるパラメーター$t$である。言いかえれば、本来ならば$n$ケの$p_i$と一つの$M$との$n+1$ケの変数が存在するのであるが、$n$ケの$p_i$の独立性を棄て去ることにより$M$と$t$の二つの変数のみが存在する場合に変えられてしまったのである。従って連続な偏導函数が存在する限り積分曲線を画くことができることになる。

ハウタッカーのこの部分の分析についてはもう一つの問題点がある。先にも述べたように revealed preference の理論の特徴の一つは、現実の消費者行動が非連続的なものであることを考慮して、無限小の変化というようなものを考えず、「微分」という方法を避けることにある。ハウタッカーは、最初にはこの原則を守って出発しなが

ら、この点に至って価格体系の変動を無限に細分することによって「微分」の方法に訴えて議論を進めている。これによって、revealed preference の理論の持つ大きな長所の一つを失ったわけであり、これはハウタッカーの理論の持つ難点の一つであると言えようが、積分曲線の存在というような事柄を扱わねばならぬ問題の性質上やむを得ないことでもあろう。

とにかく、前節における分析と同様に、多変数の場合を二変数の場合に変換し、そして、このようにして得られた積分曲線が果して無差別曲線の性質を満たしているかどうかをハウタッカーは次に問題にする。言いかえれば選択において矛盾が存しないかどうか問題にする。もし矛盾が存在しなければ積分可能条件は満たされていることになる。この点については既に前節の最後において述べた通りである。選択において矛盾が存しないためには、その積分曲線上のすべての点が相等関係になければならない。即ち、反射律、対称律、推移律の三つの性質を満たさなければならない。反射律と対称律が満たされることは直ちに証明し得るから、ただ推移律をここで新たな仮設として置かなければならない。

いま、相等関係をRで表わそう。もし推移律が満たされていれば、例えば $X^2RX^1$, $X^1RX^0$, $X^0RX^{22}$ であれば $X^2RX^{22}$ であり、且つ任意の一つの価格体系の下における均衡値の一意性の仮定から、[5] $X^2$ と $X^{22}$ は同一のものである。即ち $X^2 \equiv X^{22}$。もし推移律を仮定しなければ、必ずしも $X^2 \equiv X^{22}$ ではなく、同じ積分曲線上にあり、同じ価格体系の下で選ばれる財の組合せでありながら、一方は他方よりも高い選択順序にあることになり矛盾が生じる。このような場合の積分曲線は無差別曲線の性質を満たすものではなく、この時には積分可能の条件は満されないことになる。

(1) これについては、P. A. Samuelson, "A Note on The Pure Theory of Consumer's Behaviour," *Economica*, 1938, pp. 61~71, 353~354. を参照のこと。

(2) ここで等号を許したのは、$X^{11}$と$X^{0}$とが全く同一のものである場合をも含めるためである。なお、以下の部分については、第二図を参照のこと。

(3) 注意しなければならないことは、まだ、この段階では、推移律は仮定されていないことである。従って $a_i \geqq a_{i-1}$ $(i=1, 2, \cdots$ から直ちに $a_i \geqq a_{i-1} \geqq a_{i-2} \geqq$………を導くことはできない。

(4) ここで、取り上げられている変換される変数は価格であって財の量ではない。しかし、価格ベクトルと財量ベクトルとの間には一対一の対応が存在すると仮定されることができるから、価格を問題にするか、財の量を問題にするかによって理論に本質的な差異を生じることはない。

(5) 言いかえれば、価格ベクトルと財量ベクトルとの一対一の対応の仮定によって。

## 三

最後に、revealed preference の理論の仮定に立ちながら、二つの積分可能条件、スルツキー方程式の代替項の対称性と選択順序の推移律という二つの条件の間の関係について更に考察してみよう。[1]

いま、所得は一定として価格体系$P^{0}$がから$P^{1}$へ変化した場合、消費者がなおも依然として価格体系が$P^{0}$にあった時と同じ満足の程度を得ているようにするためには、即ち無差別な状態にあるようにするためには所得においてどれだけの補整的変化が必要であるかを考えよう。この補整的変化の大きさは$P^{0}$から$P^{1}$への「価格変化にもかかわらず、消費者をして欲するならば、すべての財につき従来と同じ量を買うことを可能ならしめるような所得の変化[2]」

と、逆に$P^1$から$P^0$へ価格が変化したと考えた場合の同様の所得変化との間にあることは容易に知られる。即ち、この補整的変化を$C$で表わせば、

$$\sum_i (p_i^0-p_i^1)\, x_i^0 \leqq C \leqq \sum_i (p_i^0-p_i^1)\, x_i^1 \cdots\cdots(1)$$

(1)式の $\sum_i (p_i^0-p_i^1)\, x_i^0$, $\sum_i (p_i^0-p_i^1)\, x_i^1$ はベクトル$P$、$X$の内積であるから、これを書きかえて、

$$(P^0-P^1, X^0) \leqq C \leqq (P^0-P^1, X^1) \cdots\cdots (1')$$

$C$が $(P^0-P^1, X^0)$ と $(P^0-P^1, X^1)$ の丁度中間にあると仮定すれば、

$$C=(P^0-P^1, X^1)+\frac{1}{2}(P^0-P^1, X^1-X^0)=\frac{1}{2}(P^0-P^1, X^0+X^1)$$

さて次のような無差別の関係にある三つの状態を考えてみよう。

(0)。価格は$P$で、需要量は$X$。

(1)。価格は $P+\Delta_1 P$, 需要量は $X+\Delta_1 X$

(2)。価格は $P+\Delta_2 P$, 需要量は $X+\Delta_2 X$

(0) の状態から(1)の状態への変化の場合の所得の補整的変化$C_{01}$は

$$C_{01}=\left(\Delta_1 P,\ X+\frac{1}{2}\Delta_1 X\right)$$

(1)から(2)への変化の場合の所得の補整的変化$C_{12}$は、

$$C_{12}=\left(\Delta_2 P-\Delta_1 P,\ X+\frac{1}{2}\Delta_1 X+\frac{1}{2}\Delta_2 X\right)$$

(0)から(2)への変化の場合の補整的變化$C^{02}$は、

$$C_{02} = \left(\varDelta_2 P,\ X + \frac{1}{2}\varDelta_2 X\right)$$

ここで選択順序の推移律を仮定しよう。その時には、$C_{02} = C_{01} + C_{12}$ であるから、

$$\frac{1}{2}(\varDelta_2 P, \varDelta_2 X) = \frac{1}{2}(\varDelta_1 P, \varDelta_1 X) + \frac{1}{2}(\varDelta_2 P - \varDelta_1 P, \varDelta_2 X + \varDelta_1 X)$$

$$= \frac{1}{2}(\varDelta_1 P, \varDelta_1 X) + \frac{1}{2}(\varDelta_2 P, \varDelta_2 X) + \frac{1}{2}(\varDelta_2 P, \varDelta_1 X)$$

$$- \frac{1}{2}(\varDelta_1 P, \varDelta_2 X) - \frac{1}{2}(\varDelta_1 P' \varDelta_1 X)$$

故に、$(\varDelta_2 P, \varDelta_1 X) = (\varDelta_1 P, \varDelta_2 X)$

いま、初期状態(0)から(1)への変化した時には第 i 財の価格のみが変化し、(2)へ移った時には第 j 財の価格のみが変化したとしよう。その時には、$\varDelta_2 p_j \varDelta_1 x_j = \varDelta_1 p_i \cdot \varDelta_2 x_i$

故に、$\dfrac{\varDelta_1 x_j}{\varDelta_1 p_i} = \dfrac{\varDelta_2 x_i}{\varDelta_2 p_j}$

これはスルツキー方程式の代替項の対称性を示すものに他ならない。このように或る仮定―― $C$が $(P^0 - P^1, X^0)$ と $(P^0 - P^1, X^1)$ の丁度中間にあるという仮定――の下においては、選択順序の推移律は代替項の対称性の存在を保証するに十分である。しかし、この仮定は近似的にしても常に満たされているわけではない。

(1) この節での議論は、主として、J. R, Hicks: *A Revision of Demand Theory*' 1956, chap. XIII, pp. 120-128. にもとづく

(2) J, R. Hicks, *Value and Capital*, 2nd ed, 1949,